

Le capo¹du troupeau des séries de Fourier.

par $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$

Valence-Lyon-Grenoble printemps automne hiver 2011, 2012
Collection²de « cours à distance » d'accoutumance à de robustes³références.

Résumé

$$x - \pi + \frac{\sin(nx)}{n} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^x 1 + \cos(nt) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kt) dt = \int_{\pi}^x \sin(nt) \cotg\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Uniformément sur tout $]\epsilon, 2\pi - \epsilon[$, par intégration par parties $S_n^* = \frac{\sin(nx)}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k}$, les sommes modifiées⁴convergent vers $\frac{\pi-x}{2}$ et sont dans $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc la *corne* 2π -périodique : $\psi, \psi(0)=0, 0 < x < 2\pi, \psi(x) = \frac{\pi-x}{2}$ est limite en moyenne quadratique de sa série de Fourier et :

A Si $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ alors $\chi_{\alpha,\beta} : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{R}, \chi_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\pi} [\psi(x - \alpha) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \psi(x - \beta)]$ est la fonction caractéristique⁵de l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Ainsi toute fonction en escalier est limite en moyenne quadratique de sa série de Fourier et, par densité des fonctions en escalier dans les fonctions de carré intégrable, le même résultat a lieu pour toute fonction de carré intégrable.

B La primitive $E_n^*(x) = \int_{\pi}^x D_n^*$ de $D_n^*(y) = 1 + \cos(ny) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(ky)$, le *n-noyau de Dirichlet* modifié, est à valeurs dans $[-\pi, \pi]$ et, sur tout $[\epsilon, 2\pi - \epsilon], 0 < \epsilon < \pi$, tend uniformément vers 0.

C Les sommes de Fourier partielles modifiées d'une fonction 2π périodique intégrable sont :

$$S_n^*(f)(x) = \frac{1}{2} (c_{-n}(f)e^{-inx} + c_n(f)e^{inx}) + \sum_{k=1-n}^{n-1} c_k(f)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_x^{x+2\pi} f(t) D_n^*(t-x) dt$$

D'où, par intégration par parties sur chaque intervalle de dérivabilité, le théorème de Dirichlet : Si f est 2π -périodique dérivable par morceaux et f' intégrable alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $S_n^*(f)(x) =$

$$\frac{1}{2\pi} \left[f_-(x) E_n^*(2\pi) - f_+(x) E_n^*(0) - \left[\sum_{j=1}^m [f_+(\alpha_j) - f_-(\alpha_j)] E_n^*(\alpha_j) + \int_x^{x+2\pi} f(t) E_m^*(t-x) dt \right] \right]$$

tend, quand $n \rightarrow \infty$, vers la moyenne $\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}$ des limites à gauche et à droite de f en x .

Abstract

A glimpse at $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$ gives the above few lines exposition of Fourier series's quadratic mean convergence for square integrable functions and Dirichlet's convergence theorem of the Fourier serie of a piecewise differentiable function with integrable derivative.

¹ chef en italien, dans le Grésivaudan la vache dominante conduisant le troupeau à l'alpage.

² rédigée par Alexis Marin (Grenoble) alexis.charles.marin@gmail.com

³ mais que sous le règne de El'hemdée, certains traitent de poussiéreuses.

⁴ qui donnent lieu à des noyaux de Dirichlet d'écriture et majoration plus simple que sommes et noyaux de Dirichlet usuels. Avec, dans leurs preuves, calligraphie et majorations plus lourdes, les énoncés A, B et C ci-dessous ont aussi lieu pour sommes et noyaux de Dirichlet usuels.

⁵ modifiée aux extrémités par $\chi(\alpha) = \frac{1}{2} = \chi(\beta)$.

COMMENTAIRES BIBLIOGRAPHIQUES

Les premiers textes ([D]¹, le chapitre IV du second tome de [J2], chapitre III de [Le], Kapitel 31 de [La]... ignorent² la théorie quadratique et commencent par le théorème de Dirichlet pour les fonctions monotones par morceaux et, après Jordan [J1], à variation bornée. Ce résultat plus général que C ci-dessus admet cependant la présente démonstration, une fois remarqué (cf. §54 de [R Sz-N]) que l'intégration (de Stieljes) par parties a lieu pour les fonctions à variation bornée.

Les traités modernes (2.6 de [H R], 4.24 de [Ru]...) tirent la complétude du système trigonométrique³ de la densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues, muni de la norme uniforme.

Lebesgue ([Le]§24, [Z]I§6.) obtenait la complétude directement⁴, sans utiliser la plus fine densité uniforme, citant une preuve simultanée⁵ [K]I§2 d'A. Kneser.

Tous deux ([Le]§1, §28, [K]I§4-5) donnent aussi une réduction à la complétude du théorème de Dirichlet pour les fonctions C^2 par morceaux⁶ à nombre fini de discontinuités, le rôle de $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ étant plus explicite dans [Le] que [K] :

¹ reproduit dans [K L-R] avec une histoire détaillée des séries de Fourier cf. aussi [Le]§15-19.

² cependant dès 1903 Hurewitz [H] met l'accent sur la théorie quadratique en la déduisant du résultat, que Féjer venait d'établir, de convergence uniforme vers une fonction continue des moyennes des n premières sommes partielles de sa série de Fourier, cf. aussi [Z]III §3 p. 89.

³ d'où I *La série de Fourier de f de carré intégrable converge en moyenne quadratique vers f .* et l'énoncé ponctuel II *Si les sommes partielles d'une série trigonométrique Σ sont uniformément majorées et convergent simplement vers une fonction f alors Σ est la série de Fourier de f .*

⁴ Par contraposée, *f continue 2π -périodique non nulle a un coefficient de Fourier non nul* : Soit $\alpha < \beta < \alpha + \pi$ et $\epsilon > 0$ tels que pour $x \in [\alpha, \beta]$, $|f(x)| \geq \epsilon$, quitte à prendre $-f$, $f(x) \geq \epsilon$. Comme $\cos(x - \frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos(\frac{\beta-\alpha}{2}) \in]-2, 1]$, est nulle en α, β et, entre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \pi$, monotone, le polynôme trigonométrique $\psi_n = \left[1 + \frac{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2}-x)} + e^{i(x-\frac{\alpha+\beta}{2})}}{2} - \cos(\frac{\beta-\alpha}{2}) \right]^n = \sum_{k=-n}^n d_k e^{-ikx}$

tend vers $+\infty$ sur $] \alpha, \beta[$ et 0 sur $] \beta, \alpha + 2\pi[$ donc pour n assez grand :

$\int_0^{2\pi} f \psi_n = 2\pi \sum_{k=-n}^n d_k c_k(f) > 0$ et un des coefficients de Fourier, $c_k(f)$ de f est non nul.

⁵ trop longue pour être exposée ici, mais avec des techniques Hilbertiennes étonnamment algébriques et un argument de série entière, elle semble oubliée (tant par [K L-R] que [Z]).

⁶ utilisant le second théorème de la moyenne, Lebesgue demande seulement à la dérivée d'être à variation bornée, en fait cette preuve passe pour f réglée absolument continue sur ses intervalles de continuité, énoncé que Hardy et Rogosinski ([H R] §3.8-3.9) font suivre de la complétude (note ³ ci-dessus) et d'une intégration par partie (§3.4) pour chaque coefficient de Fourier.

Soit f 2π -périodique à variation bornée (resp. dérivable par morceaux) alors :

1) f est somme d'une fonction continue à variation bornée (resp. dérivable par morceaux) et du modèle explicite
$$\sum_{0 \leq \alpha < 2\pi} \frac{f_+(\alpha) - f_-(\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x - \alpha))}{n}.$$

2) Si f continue et f' à variation bornée⁷ alors f est limite uniforme de $S_n^*(f)$.

Hardy & Rogosinski enfin, après l'avoir déduite de la complétude et d'une majoration de ses sommes partielles⁸ obtiennent aussi ([H R] fin du §3.8) la somme de $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ à partir, suivant Euler, du développement⁹, pour $|z| < 1$, de $\log(1 - z)$.

RÉFÉRENCES

- [D] P.J. L. DIRICHLET. — *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre deux limites données.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle), 4, 157-169, 1829.
- [H R] G.H. HARDY, W.W. ROGOSINSKI. — *Fourier series.*, Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics 38, Cambridge University Press 1956.
- [H] A. HURWITZ. — *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen.*, Mathematische Annalen, 57, 425-446 1903.
- [J1] C. JORDAN. — *Sur la série de Fourier*, Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris, 92, 228-230, 1881.
- [J2] C. JORDAN. — *Cours d'analyse de l'école polytechnique t. I, II, III.*, Paris, Gauthier-Villars, 1882.
- [K L-R] J.-P. KAHANE, P.-G. LEMARIÉ-RIEUSSET. — *Séries de Fourier et ondelettes.*, Paris, Cassini, 1998.
- [K] A. KNESER. — *Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik.*, Mathematische Annalen, 58, 81-147, 1904.
- [La] E. LANDAU. — *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.*, Groningen, P. Noordhoff, 1934.
- [Le] H. LEBESGUE. — *Leçons sur les séries trigonométriques.*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.
- [R, Sz-N] F. RIESZ, B. SZ-NAGY. — *Leçons d'analyse fonctionnelle.*, Paris, Gauthier-Villars; Budapest, Akadémiai Kiado, 1968.
- [Ru] W. RUDIN. — *Real and complex analysis.* 2nd edition, McGraw-Hill, 1974.
- [Z] A. ZYGMUND. — *Trigonometric series.* 2nd edition, Cambridge University Press, 1959 [1^{ière} édition, Varsovie, 1935].

⁷ L'inégalité de Bessel $2\pi \sum |c_n(f')|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$, Cauchy-Schwarz et $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$ donnent $\sum c_n(f)$ absolument convergente. Par II de la note ³ p. 2, il suffit f' de carré intégrable.

⁸ si $0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2n}$, $|S_n^*| \leq \sum_{k=1}^n \frac{nx}{n} \leq nx \leq \frac{\pi}{2}$ et si $\frac{\pi}{2n} \leq x \leq \pi$, $|S_n^*(x)| \leq \frac{1}{n} \cotg \frac{\pi}{4n} \leq \frac{4}{\pi}$.

⁹ et du théorème d'Abel en $z_0 = e^{inx}$, justifiant l'intuition d'Euler, cf. aussi [Z]I§2, [Le]§21.

$$\sum \frac{\sin(kx)}{k}$$

APPENDICES

0 Sommes partielles et sommes partielles modifiées.

Les *sommes modifiées* d'une suite¹ $u_x, x \in \mathbf{X}$ entre $a, b \in \mathbf{R}$ sont définies pour vérifier la relation de Chasles $\sum_a^c u_n = \sum_a^b u_n + \sum_b^c u_n$: si $a \leq b$ on a :

$$\sum_a^b u_n = \sum_{a \leq k \leq b} u_k - \frac{1}{2}[u_a + u_b]$$

1 L'expression $D_n^*(t) = \sin(nt) \cotg(\frac{t}{2})$ du noyau de Dirichlet modifié.

Si $D_n^*(t) = 1 + \cos(nt) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kt)$, alors le produit $D_n^*(t) \sin(\frac{t}{2})$ vaut :

$$\begin{aligned} \sin(\frac{t}{2}) + \cos(nt) \sin(\frac{t}{2}) + 2 \cos(t) \sin(\frac{t}{2}) + \dots + 2 \cos((n-1)t) \sin(\frac{t}{2}) = \\ \cos(nt) \sin(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{t}{2}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{2k+1}{2}t) - \sin(\frac{2k-1}{2}t) = \cos(nt) \sin(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{2n-1}{2}t) \\ = \cos(nt) \sin(\frac{t}{2}) + \sin(nt) \cos(\frac{-t}{2}) + \cos(nt) \sin(\frac{-t}{2}) = \sin(nt) \cos(\frac{t}{2}). \end{aligned}$$

Donc, si $0 < t < 2\pi$ on a : $D_n^*(t) = \sin(nt) \cotg(\frac{t}{2})$. ■

2 La première intégration par parties.

$E_n^*(x) = \int_{\pi}^x \sin(nt) \cotg(\frac{t}{2}) dt = -\frac{\cos(nx)}{n} \cotg(\frac{x}{2}) + \int_{\pi}^x \frac{\cos(nt)}{n} \frac{d}{dt} \cotg(\frac{t}{2}) dt$
donc, si $0 < x < 2\pi$ on a $|E_n^*(x)| \leq \frac{2}{n} |\cotg(\frac{x}{2})| \leq \frac{4}{n \min(x, 2\pi-x)}$ et $E_n^*(x)$ converge vers zéro uniformément sur tout intervalle $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$.

3 La majoration uniforme $|E_n^*(x)| = |\int_{\pi}^x D_n^*(t) dt| \leq \pi$.

$D_n^*(x) = 1 + \cos(nx) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kx)$ donc $E_n^*(2\pi - x) = -E_n^*(x)$ et $E_n^*(0) = -\int_0^{\pi} D_n^* = -\pi$, il suffit d'établir que si $x \in [0, \pi]$ alors $-\pi = E_n^*(0) \leq E_n^*(x) \leq \pi$.
Comme $]0, \pi[\ni t \mapsto \cotg(\frac{t}{2})$ est positive décroissante, E_n^* est, sur $[0, \pi]$, majorée par son premier maximum relatif, qui puisque $E_n^{*'}(x) = \sin(nx) \cotg(\frac{x}{2})$ est $E_n^*(\frac{\pi}{n})$ qui, d'après **2** ci-dessus, admet la majoration : $|E_n^*(\frac{\pi}{n})| \leq \frac{4n}{\pi} \leq \pi$. ■

¹ dans un groupe abélien A où l'on peut diviser par 2 et indicées par une partie discrète $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ des réels, ici $A = \mathbf{C}, \mathbf{X} = \mathbf{N} \setminus \{0\}, \mathbf{Z}$ les entiers positifs ou relatifs et, si $k \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{X}, u_k = 0$.

4 Fonctions créneaux en deux coups de la corne ψ .

Soit $C_{\alpha,\beta} = 2\pi\chi_{\alpha,\beta}$. Si $x \in]0, 2\pi[\setminus [\alpha, \beta]$ alors $x - \alpha, x - \beta \in]-k2\pi, (1-k)2\pi[$ pour un même $k=1, 0$ et $C_{\alpha,\beta}(x) = \pi - (x - \alpha + 2k\pi) - \alpha + \beta - [\pi - (x - \beta + 2k\pi)] = 0$.

Si $x \in]\alpha, \beta[$ alors $C_{\alpha,\beta}(x) = \pi - (x - \alpha) - \alpha + \beta - [\pi - (x - \beta + 2\pi)] = 2\pi$.

$C_{\alpha,\beta}(\alpha) = 0 - \alpha + \beta - [\pi - (\alpha - \beta + 2\pi)] = \pi$ et $C_{\alpha,\beta}(\beta) = \pi - (\beta - \alpha) - \alpha + \beta - 0 = \pi$.

5 L'intégrale de Dirichlet $S_n^*(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^{x+2\pi} f(t) D_n^*(t-x) dt$.

Le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f est $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$, donc la $n^{\text{ième}}$ somme modifiée $S_n^*(f)(x) = \frac{1}{2} [c_{-n}(f) e^{-inx} + c_n(f) e^{inx}] + \sum_{k=1-n}^{n-1} c_k(f) e^{ikx}$ vérifie :

$$4\pi S_n^*(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-in(x-t)} dt + \int_0^{2\pi} f(t) e^{in(x-t)} dt + 2 \sum_{k=1-n}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt$$

qui, puisque $e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)} = 2 \cos(k(x-t)) = 2 \cos(k(t-x))$, vaut :

$$\int_0^{2\pi} f(t) [e^{-in(x-t)} + e^{in(x-t)} + 2 \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{ik(x-t)}] dt = \int_0^{2\pi} f(t) 2D_n^*(t-x) dt.$$

D'où le résultat en divisant par 4π et utilisant la 2π -périodicité de $t \mapsto f(t) D_n^*(t-x)$. ■

6 La dernière intégration par partie.

Si f est 2π périodique, dérivable par morceaux avec f' intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $x \in \mathbf{R}$, on note $x = \alpha_0 < \dots < \alpha_{m+1} = x + 2\pi$ tels que f est dérivable sur $] \alpha_j, \alpha_{j+1}[$.

Ainsi f a des limites à gauche et à droite en les α_k et une intégration par parties de l'intégrale de Dirichlet sur chaque intervalle de dérivabilité de f donne :

$$2\pi S_n^*(f)(x) = \sum_{j=0}^m f_-(\alpha_{j+1}) E_n^*(\alpha_{j+1} - x) - f_+(\alpha_j) E_n^*(\alpha_j - x) - \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(t) E_n^*(t-x) dt$$

qui, en regroupant les termes et comme par périodicité $f_-(x+2\pi) = f_-(x)$, vaut :

$$f_-(x) E_n^*(2\pi) - f_+(x) E_n^*(0) - \left[\sum_{j=1}^m [f_+(\alpha_j) - f_-(\alpha_j)] E_n^*(\alpha_j) + \int_x^{x+2\pi} f(t) E_n^*(t-x) dt \right]$$

d'où, puisque (Cf. 3) $E_n^*(2\pi) = \pi = -E_n^*(0)$, et par B du résumé (Cf. 2 et 3) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(f)(x) = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}$$

■

TABLE DES MATIÈRES

I A B C DES SÉRIES DE FOURIER

Résumé.	1
Abstract.	1
Commentaires bibliographiques.	2
Références.	3

II APPENDICES¹

0 Sommes partielles et sommes partielles modifiées.	4
1 L'expression $D_n^*(t) = \sin(nt) \cotg(\frac{t}{2})$ du noyau de Dirichlet modifié.	4
2 La première intégration par parties.	4
3 La majoration uniforme $ E_n^*(x) = \int_{\pi}^x D_n^*(t) dt \leq \pi$	4
4 Fonctions créneaux en deux coups de la corne ψ	5
5 L'intégrale de Dirichlet $S_n^*(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^{x+2\pi} f(t) D_n^*(t-x) dt$	5
6 La dernière intégration par parties.	5
TABLE DES MATIÈRES.	6

¹ $\sum \frac{\sin(kx)}{k}^{[*]}$ écrivait ABKSA : à ne brouter qu'en cas de sécheresse sur l'alpage (N.d.T.^(**)).

(*) Chalet de l'Alpe/Habert de Saint Vincent, Longitude 5.91437 Latitude 45.41463.

(**) alexis.charles.marin@gmail.com